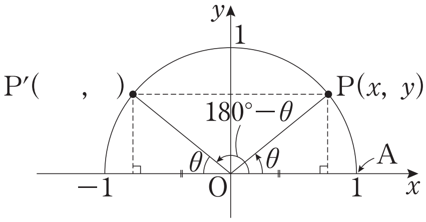
PART4　$180°-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

要点 ①　$180°-\theta$ の三角比



右図のように，単位円周上に点 P，点 P′ を

$\angle AOP=\theta$，$\angle AOP'=180°-\theta$

となるようにとると，点 P と点 P′ は y 軸に関して対称である。よって，$P(x, y)$ とおくと，P′(　，　) となる。

$\sin\theta=$　，$\sin(180°-\theta)=$

$\cos\theta=$　，$\cos(180°-\theta)=$

$\tan\theta=$　，$\tan(180°-\theta)=$

であるから，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の関係が成り立つ。

$180°-\theta$ の三角比

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$　　$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$　　$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

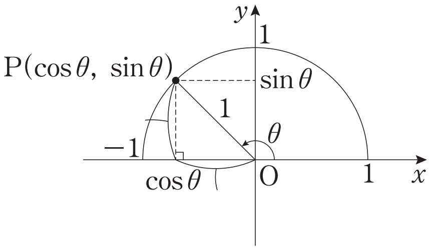
この関係を用いると，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる。

例　$125°=180°-$　　より

$\sin125°=\sin(180°-$　　$)=$

要点 ②　単位円と三角比の相互関係

θ が鋭角のときの三角比の相互関係が，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のときも成り立つかについて，単位円を用いて確認する。



右図において $\tan\theta=$ ―――

また，三平方の定理より

(　　　)^2＋(　　)$^2=1^2$

よって　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

この等式の両辺を $\cos^2\theta$ で割って整理すると

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

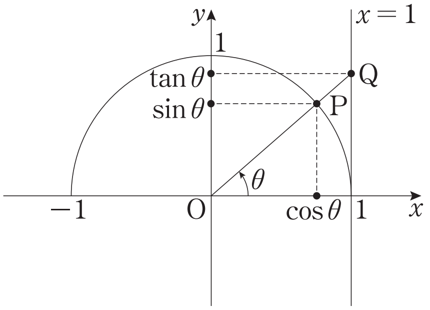
したがって，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のときも次の関係が成り立つ。

三角比の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　**2**　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　**3**　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

この相互関係を用いると，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか１つの値から，他の２つの値を求めることができる。その際，θ が鋭角の場合，鈍角の場合のそれぞれにおいて三角比の符号に注意する必要がある。

θ が鋭角$(0°<\theta<90°)$の場合

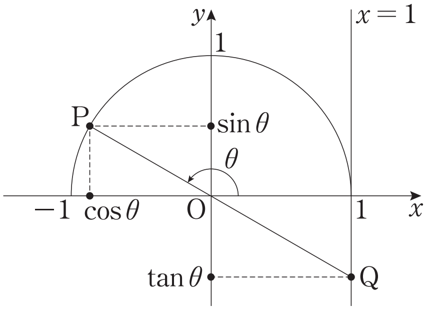


$\sin\theta$

$\cos\theta$

$\tan\theta$

θ が鈍角$(90°<\theta<180°)$の場合



$\sin\theta$

$\cos\theta$

$\tan\theta$

例　$90°<\theta<180°$ とする。$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$

$90°<\theta<180°$ より，$\cos\theta$　　であるから

$\cos\theta=$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{5}\div$　　　$=\dfrac{3}{5}\times$

4 (1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 153^\circ$　　(ii)　$\cos 102^\circ$　　(iii)　$\tan 170^\circ$

(2)(i)　$90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

$180^\circ - \theta$ の三角比

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$　　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$　　$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

この関係を用いることにより，鈍角の三角比を，鋭角の三角比で表すことができる。

三角比の相互関係

1　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　**2**　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　**3**　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

この関係を用いることにより，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか１つの値がわかると，他の２つの値を求めることができる。

・θ が鋭角のとき　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$

・θ が鈍角のとき　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$，$\tan\theta < 0$

であることに注意。

第12講　PART4 確認問題

1　$\sin 160^\circ$ を鋭角の三角比で表したものを，次の①～④から選べ。［ア］

①　$\sin 10^\circ$　　②　$\sin 20^\circ$

③　$\cos 10^\circ$　　④　$\cos 20^\circ$

2　$\cos 110^\circ$ を鋭角の三角比で表したものを，次の①～④から選べ。［イ］

①　$\sin 70^\circ$　　②　$-\sin 70^\circ$

③　$\cos 70^\circ$　　④　$-\cos 70^\circ$

3　$\tan 140^\circ$ を鋭角の三角比で表したものを，次の①～④から選べ。［ウ］

①　$\tan 40^\circ$　　②　$-\tan 40^\circ$

③　$\dfrac{1}{\tan 40^\circ}$　　④　$-\dfrac{1}{\tan 40^\circ}$

4 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，

$\cos\theta =$ エ，$\tan\theta =$ オ

である。

エ，オ は次の①～⑥のうちから選べ。

① $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　② $\dfrac{3}{4}$　③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$

5 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ のとき，

$\sin\theta =$ カ，$\tan\theta =$ キ

である。

カ，キ は次の①～⑥のうちから選べ。

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　③ $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

④ $\dfrac{5}{3}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

6 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$ のとき，

$\cos\theta =$ ク，$\sin\theta =$ ケ

である。

ク，ケ は次の①～⑥のうちから選べ。

① $\dfrac{3}{5}$　② $\dfrac{4}{5}$　③ $\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{3}{5}$　⑤ $-\dfrac{4}{5}$　⑥ $-\dfrac{3}{4}$

【MEMO】

PART4　$180°-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

4　(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 153°$　(ii)　$\cos 102°$　(iii)　$\tan 170°$

(2)(i)　$90° < \theta < 180°$ とする。$\sin\theta = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\tan\theta = -2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\sin 153° = \sin(180° - 27°) = \sin 27°$

(ii)　$\cos 102° = \cos(180° - 78°) = -\cos 78°$

(iii)　$\tan 170° = \tan(180° - 10°) = -\tan 10°$

(2)(i)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$90° < \theta < 180°$ より，$\cos\theta < 0$ であるから $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

また $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

(ii)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

また $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-3) = -2\sqrt{2}$

(iii)　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5$

$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

$\tan\theta = -2 < 0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta < 0$

よって　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

第12講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ)$

$= \mathbf{\sin 20^\circ}$ [A]

[A]　$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

2

[正解] イ：④

[解説]

$\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ)$

$= \mathbf{-\cos 70^\circ}$ [B]

[B]　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

3

[正解] ウ：②

[解説]

$\tan 140^\circ = \tan(180^\circ - 40^\circ)$

$= \mathbf{-\tan 40^\circ}$ [C]

[C]　$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

4

[正解] エ：③，オ：⑤

[解説]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より， [D]

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\cos\theta < 0$ であるから， [E]

$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \mathbf{-\dfrac{3}{4}}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ [D]

$= \dfrac{\sqrt{7}}{4} \div \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

[D]　三角比の相互関係

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

[E]

θ が鋭角のとき，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$

θ が鈍角のとき，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$，$\tan\theta < 0$

5 [正解] カ：②，キ：⑥

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，[F]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\sin\theta\geqq0$ であるから，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ [F]

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

[F]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

6 [正解] ク：④，ケ：②

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，[G]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$$

$$=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{25}$$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから，

$\cos\theta<0$ [H]

よって，$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，[G]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

[G]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

[H]　$\cos\theta$ の符号に注意する。